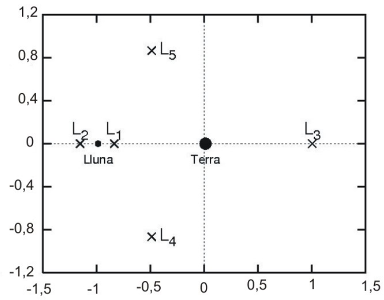
que són l'efectivitat de la vela i la seva orientació. A continuació revisa models existents per navegació amb vela al voltant d'un planeta, juntament amb diverses estratègies de control (canvi de l'orientació de la vela durant el vol). La més intuïtiva és l'anomenada *control on-off*: orientant la vela perpendicularment a la llum solar mentre el satèl·lit s'allunya del sol i paral·lelament quan s'apropa, s'aconsegueix convertir una òrbita inicialment el·líptica en una espiral, que acaba escapant de l'atracció del planeta. Al treball s'han implementat efectivament aquesta estratègia de control juntament amb d'altres, i s'han calculat les corresponents trajectòries.



Punts de libració del RTBP

La novetat del treball radica en el desenvolupament i estudi d'un model per a la navegació amb vela al voltant dels punts de libració del sistema Terra-Lluna. Els *punts de libració*, descoberts per Euler i Lagrange, i també coneguts com a *punts lagrangians*, són els punts d'equilibri del problema restringit de tres cossos (RTBP), en el qual

- es descriu el moviment d'un cos de massa negligible (el satèl·lit artificial) sota l'atracció gravitatòria de dos cossos massius o *primaris* (Terra i Lluna),
- se suposa que els primaris descriuen cercles un al voltant de l'altre, i
- es pren un sistema de coordenades en el qual els primaris estan fixats.

Els punts de libració es denoten per L_i, $i = 1, \ldots, 5$ (vegeu la figura). El més intuïtiu és el punt L_1, que hom pot imaginar com «el punt on les atraccions de la Terra i la Lluna es cancel·len». No és exactament així perquè, a més de les forces gravitatòries, cal considerar forces centrífugues, que són les responsables de l'existència dels altres punts de libració. Si afegim al RTBP l'efecte del Sol, suposant per a ell un moviment circular uniforme al voltant del baricentre Terra–Lluna, de període (aproximadament) un mes, obtenim el *problema bicircular* (BCP). Com que aquest model està governat per un sistema d'equacions diferencials periòdiques, els punts de libració passen a ser substituïts per òrbites periòdiques.

En aquest treball es desenvolupa el problema bicircular amb vela (BCPS), que afegeix al BCP l'impuls de la vela solar, de manera que passa a dependre dels paràmetres de la vela (efectivitat i orientació). Per a aquest nou model, s'estudia per a quins valors d'efectivitat i orientació es preserven les òrbites periòdiques substitutes dels punts de libració, mitjançant tècniques de continuació numèrica, partint de les corresponents òrbites periòdiques del BCP. També s'estudia l'estabilitat d'aquestes òrbites.

Aquest treball constitueix un nou pas en la línia d'aplicació de la teoria de sistemes dinàmics al disseny de missions espacials a punts de libració, que va ser introduïda per Carles Simó els anys vuitanta, i en la qual treballen diversos investigadors dels grups de sistemes dinàmics de Barcelona.

Josep M. Mondelo
UAB

Premi Évariste Galois 2007

$\mathbb{CH}^n$: l'espai, els convexos i l'infinit

Un dels problemes clàssics de la geometria ha estat estudiar la relació entre l'àrea d'una figura del pla i el perímetre de la corba que la tanca. Per exemple, fixada la longitud del perímetre quina és la figura amb àrea més gran que pot envoltar? Aquest és el clàssic problema isoperimètric i, al pla, té el cercle com a solució. Si en lloc de pensar al pla pensem a l'espai llavors ens podem preguntar per la relació entre el volum d'un cos i l'àrea que el tanca. Novament l'esfera dóna solució a aquesta qüestió.

Un altre problema d'aquest tipus, també

molt estudiat, és quin valor pren el quocient entre l'àrea i el perímetre per a successions de figures convexes del pla que creixen tendint a omplir-lo. En el pla euclidià ordinari és fàcil veure que aquest valor és infinit. És a dir, l'àrea creix molt més de pressa que el perímetre. Per exemple, per a un cercle de radi r tenim que l'àrea és πr^2 i el perímetre $2\pi r$, llavors el quocient tendeix a infinit com ho fa el radi. Ara bé, hi ha altres geometries (no euclidianes) per a les quals l'anterior límit no és infinit.

Una d'aquestes geometries és la hiperbòlica. El pla hiperbòlic és un espai en el qual no es compleix el cinquè postulat d'Euclides, és a dir, donada una recta i un punt exterior hi ha més d'una recta que passa pel punt i que és paral·lela a la recta donada. El comportament del quocient àrea/perímetre al pla hiperbòlic va ser estudiat l'any 1971 per Lluís A. Santaló i I. Yañez («Averages for polygons formed by random lines in Euclidean and hyperbolic planes», *J. Appl. Probability*, núm. 9 (1972), p. 140–157.) que van demostrar que per a cercles i altres convexos *prou bons* el quocient tendeix a 1.

En el treball de la Judit Abardia, que li ha valgut el Premi Galois de la SCM del 2007, s'estudia la relació entre el volum i l'àrea d'un cos a l'espai hiperbòlic complex.

L'espai hiperbòlic complex és l'espai amb curvatura negativa més senzill després de l'espai hiperbòlic real. Si té dimensió complexa n (i, per tant, dimensió real $2n$) el denotarem per $\mathbb{CH}^n$. Des del punt de vista de la geometria complexa, és a dir, pensant-lo com a varietat complexa i no com a varietat real, té curvatura constant. Es diu que té curvatura holomorfa constant.

Per tal de comprendre'l millor se n'estudien en aquest treball diferents models, la qual cosa ens dóna una visió més geomètrica, que permet estudiar de manera senzilla les seves propietats i les dels seus objectes, com per exemple quin aspecte tenen les hipersuperfícies i els convexos.

Com a curiositat de l'espai hiperbòlic complex destaquem que les esferes no tenen totes les curvatures principals iguals, cosa que ens diu que situats en un punt d'una esfera d'aquest espai la veuríem corbada diferent segons cap a quina direcció miréssim.

Un dels principals resultats del treball de la Judit Abardia fa referència als valors que pot prendre en el límit el quocient volum/àrea en el cas de l'espai hiperbòlic complex $\mathbb{CH}^n$ (aquest sempre serà inferior a $1/2n$ si la curvatura holomorfa és -4). Concretament:

Teorema *Sigui* $\{\Omega(t)\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ *una família de dominis compactes* λ*-convexos que tendeixin a omplir tot l'espai* $\mathbb{CH}^n$. *Denotem per* $\mathrm{vol}(\Omega(t))$ *el volum de* $\Omega(t)$ *i per* $\mathrm{vol}(\partial\Omega(t))$ *el volum (àrea) de la seva vora. Llavors*

$$\frac{\lambda}{4n} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(\Omega(t))}{\mathrm{vol}(\partial\Omega(t))} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(\Omega(t))}{\mathrm{vol}(\partial\Omega(t))} \leq \frac{1}{2n}.$$

Aquest resultat millora a $\mathbb{CH}^n$ l'obtingut per A. A. Borisenko, E. Gallego i A. Reventós («Relation between area and volume for λ-convex sets in Hadamard manifolds», *Differential Geom. Appl.*, núm. 14 (2001), p. 267–280,) per a varietats de Hadamard.

El concepte de λ-convexitat generalitza l'habitual de convexitat (quan $\lambda = 0$ estem parlant de convexos). Controla la curvatura de la vora dels conjunts que es consideren.

També demostra que la cota superior que es dóna en aquest teorema és la millor possible. En efecte, a partir de les esferes i els cilindres de $\mathbb{CH}^n$ defineix diverses successions de convexos que tendeixen a omplir tot l'espai i que tenen aquest valor com a límit.

Felicitem la Judit pel seu magnífic treball i l'encoratgem a continuar treballant en aquesta línia.

Agustí Reventós
UAB